

Temas: **Integrales**

1_ Integración inmediata.

2_ Integral indefinida.

3_ Integración por sustitución.

4_ Integrales definidas Cálculo de la integral definida.

5_ Integración por partes.

1_ Integrar de manera inmediata las siguientes funciones.

a) $\int \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2}} dx =$

b) $\int (3\sqrt{x} + \frac{10}{x^6}) dx =$

c) $\int (\text{sen} x + 7\text{cos} x - 1) dx =$

d) $\int \text{sen}^2 3x dx =$

e) $\int \text{sen} 2x \cdot \text{cos} 5x dx =$

f) $\int \frac{x+3}{x^2+x+2} dx =$

g) $\int 4x\sqrt{2x^2 - 1} dx =$

h) $\int (7^x - 5\text{cos} x + \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}) dx =$

i) $\int \frac{\text{arctg} x}{1+x^2} dx =$

j) $\int \frac{3x+1}{\sqrt{2x^2+x+3}} dx =$

2_ Integrar de las siguientes funciones indefinidas.

a) $\int (x^3 + \text{cos}(2x)) dx =$

b) $\int 8e^{-2x} dx =$

c) $\int (2x + 8)^{-5} dx =$

d) $\int x\sqrt{9 - 2x^2} dx =$

e) $\int x^2 \ln |x| dx =$

3_ Integrar de las siguientes funciones por el método de sustitución.

a) $\int 2x(1 + x^2)^3 dx =$

b) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^3}} dx =$

c) $\int x^3 \operatorname{sen} x (3 + x^4) dx =$

d) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} =$

e) $\int \frac{\operatorname{cox} dx}{\sqrt{1+\operatorname{sen} x}} =$

f) $\int x^{-1} \cdot \ln x dx =$

g) $\int \frac{dx}{9a^x + 4a^{-x}} =$

4_ Integrar de las siguientes funciones definidas.

a) $\int_0^3 (-x^2 + x - 1) dx =$

b) Calcula el área del recinto limitado por la parábola $y = x^2 + 2$ y la recta que pasa por los puntos $(-1, 0)$ y $(1, 4)$

c) Calcula el área limitada por la curva $y = 6x^2 - 3x^3$ y el eje de las abscisas.

d) La grafica de $f(x) = -x^2 - 5x - 6$ es una parábola con vértice en el punto $(-\frac{5}{2}, \frac{1}{4})$ y que corta al eje Ox en la soluciones de la ecuación $-x^2 - 5x - 6 = 0$.

d) $\int_0^3 \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx =$

6_ Integrales por partes: (Nuevo tema)

INTEGRACIÓN POR PARTES: Este método permite resolver un gran número de integrales no inmediatas.

1. Sean u y v dos funciones dependientes de la variable x ; es decir, $u = f(x)$, $v = g(x)$.

2. La fórmula de la derivada de un producto de dos funciones, aplicada a $f(x) \cdot g(x)$, permite escribir,

$$d(f(x) \cdot g(x)) = g(x) \cdot f'(x) dx + f(x) \cdot g'(x) dx$$

3. Integrando los dos miembros,

$$\int d(f(x) \cdot g(x)) = \int g(x) \cdot f'(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

De la misma manera que $\int dx = x$, también $\int d(f(x) \cdot g(x)) = f(x) \cdot g(x)$

Por lo tanto, $f(x) \cdot g(x) = \int g(x) \cdot f'(x) dx + \int f(x) \cdot g'(x) dx$. De aquí se obtiene que:

$$\int f(x) \cdot g'(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int g(x) \cdot f'(x) dx$$

Ésta no es la fórmula usual de la integración por partes. Puesto que $u = f(x)$, $du = f'(x) dx$, y al ser $v = g(x)$, $dv = g'(x) dx$. Llevando estos resultados a la igualdad anterior,

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Cómo se resuelve una integral por partes Este método consiste en identificar **u** con una parte de la integral y **dv** con el resto, con la pretensión de que al aplicar la fórmula obtenida, la integral del segundo miembro sea más sencilla de obtener que la primera. No hay, y éste es el mayor problema de este procedimiento, una regla fija para hacer las identificaciones más convenientes. La resolución de un buen número de problemas es el mejor camino para adquirir la técnica necesaria. No obstante, se suelen identificar con **u** las funciones de la forma x^m si **m** es positivo; si **m** es negativo, es preferible identificar con **dv** a $x^m dx$. También suelen identificarse con **u** las funciones $\ln x$, $\arcsen x$, $\arctan x$ y con **dv**, $e^x dx$, $\sen x dx$, $\cos x dx$, etc.

Antes de empezar a practicar este método se ha de tener presente que al hacer la identificación de **dv**, ésta debe contener siempre a **dx**.

Es posible también emplear el acrónimo **ILATE** para elegir la función **u**:

Inversas

Logarítmicas

Algebraicas

Trigonométricas

Exponenciales

Una vez elegida la función **u** el resto de la integral se empleara para **dv**.

Ejemplos: Integración por partes

$$\int e^{-x} \sen x dx$$

Donde:

$$u = e^{-x} \quad dv = \sen x$$

$$du = -e^{-x} \quad v = -\cos x$$

Aplicamos formula $\int u dv = u v - \int v du$

$$\int e^{-x} \sen x dx = -e^{-x} \cos x - \int -e^{-x} (-\cos x dx)$$

$$\int e^{-x} \sen x dx = -e^{-x} \cos x - \int e^{-x} \cos x dx$$

Volvemos a Integrar

Donde:

$$u = e^{-x} \quad dv = \cos x$$

$$du = -e^{-x} \quad v = \sen x$$

$$\int u dv = u v - \int v du$$

$$\int e^{-x} \sen x dx = -e^{-x} \cos x - [e^{-x} \sen x - \int -e^{-x} \sen x dx]$$

$$\int e^{-x} \sen x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sen x - \int e^{-x} \sen x dx$$

Como podrás ver hemos llegado a la Integral original en el resultado, por lo cual la integral que tienes de lado derecho de la igualdad, la tenemos que mandar de lado izquierdo de la igualdad pero con signo contrario

$$\int e^{-x} \sen x dx + \int e^{-x} \sen x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sen x$$

$$2 \int e^{-x} \sen x dx = -e^{-x} \cos x - e^{-x} \sen x$$

El numero [2], que está multiplicando a la Integral. Lo pasamos dividiendo de lado derecho

$$\int e^{-x} \sen x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} \cos x - \frac{1}{2} e^{-x} \sen x$$

Factorizamos y nos queda

$$\int e^{-x} \sen x dx = -\frac{1}{2} e^{-x} (\cos x + \sen x) + C$$

<https://www.youtube.com/watch?v=MMh3ST1GyG4&feature=youtu.be>

<https://www.youtube.com/watch?v=III0Vw6cZn4&feature=youtu.be>

<https://www.youtube.com/watch?v=QwXXAyFJdW4&feature=youtu.be>

https://www.youtube.com/watch?v=rv4e_g_cfUc&feature=youtu.be (Parte 1)

https://www.youtube.com/watch?v=cP3qIYMY_pU&feature=youtu.be (Parte 2)

<https://www.youtube.com/watch?v=nuRgQmMSCjY&feature=youtu.be>

Resolver:

a) $\int x \cos x \, dx =$

b) $\int (2x - 5) \operatorname{sen} x \, dx =$

c) $\int \frac{x}{e^x} dx =$

d) $\int x^2 \ln x \, dx =$

e) $\int 2x \cdot \cos x \, dx =$

f) $\int x^2 \operatorname{sen} x \, dx =$