**INTEGRALES** **Parte Teórica Explicativa**

**INTRODUCCIÓN**

El análisis elemental incluye dos procesos fundamentales: el cálculo de derivadas y el cálculo de integrales.
El primer proceso, derivación o diferenciación, conducen, como ya se ha visto, a definir la recta tangente al gráfico de una función derivable en cualquier punto de la misma. El segundo proceso, la integración, permite hallar el área de regiones limitadas por el gráfico de regiones continuas.
Ambos problemas, el de la recta tangente y el del área, se resuelven por caminos totalmente independientes, pero terminan vinculadas entre sí, pues el cálculo de las ares se reduce finalmente al cálculo de antiderivada o primitivas.

## LA FUNCIÓN PRIMITIVA O ANTIDERIVADA

Si $f$ es una función definida en un intervalo $I$, la función $F$, definida en el mismo intervalo, es una función primitiva de $f$, si y sólo sí, $F$es derivable en $I$ y $f$ es su derivada.
Simbólicamente: $F$ *es primitiva de* $f$ *en* $I \Leftrightarrow \forall x \in I: F'(x)=f(x)$

## CONSTANTE DE INTEGRACIÓN

Como al realizar la operación de integración, no se halla la función exacta, si no que difiere en una constante, la integral se denomina integral indefinida, ya que al integrar se suma al resultado una constante $C$ que se llama **constante de integración** ($C$= Número real cualquiera). **CONSTANTE DE INTEGRACIÓN**

## LA INTEGRAL INDEFINIDA

El proceso de determinar todas las antiderivadas de una función se denomina antiderivación o integración. El símbolo $\int$ ("ese" alargada), llamado símbolo de integral, indica que la operación de integración debe realizarse sobre cierta función $f$. Así,

$\int(x)dx= F(x)+C$ Ejemplo: $\int 3x+1dx=\frac{3x^2}{2}+x+c$

(Lo cual se lee "la integral indefinida de $(x)$ diferencial de $x$ -o también con respecto de $x$- es igual a $F(x)$ más $C$") dice que la **integral indefinida** de $f$ es la familia de funciones dada por $F(x)+C$, donde $F'(x)=f(x)$. La función $f$ por integrar es el integrando y la constante $C$ es la constante de integración. La expresión $dx$ posterior al integrando $(x)$ sirve para recordar que la operación se efectúa respecto de $x$.

**Notas:**
►Tomamos como sinónimos los términos antiderivadas, primitiva e integral indefinida de una función $f$.
►De lo dicho, resulta que: **integrar una función es hallar sus primitivas.**

## PROPIEDADES DE LA INTEGRAL INDEFINIDA

Como consecuencia de las propiedades de la derivación se obtienen las siguientes propiedades de la integral indefinida:

**1.** La diferencial de una integral indefinida, es igual al producto de la función integrando por la diferencial de la variable independiente, es decir, es igual al elemento de integración:

$$d\int(x)dx=f(x)dx$$

**2.** La integral indefinida de la diferencial de una cierta función es igual a la suma de esta función y de una constante arbitraria:

$$\int df(x)=f(x)+C$$

**3.** La integral del producto de una constante por una función es el producto de la constante por la integral de la función:

$$\int k.f(x)dx=k.\int f(x)dx$$

**4.** La integral de una suma algebraica de funciones de la suma algebraica de las integrales de cada función:

$$\int[f(x)\pm g(x)]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$$

## INTEGRACIÓN INMEDIATA

El resultado de algunas integrales se obtiene en forma inmediata, sin más que más que recordar las reglas de la derivación, por eso se las llama **integrales inmediatas.**
Englobamos bajo esta denominación, a las primitivas de aquellas funciones que pueden hallarse por simple aplicación de la antiderivación, o a las de aquellas que requirieron previamente ser operadas algebraicamente para reducirlas a la forma de las antiderivadas de la tabla siguiente:

| N° | Integral | Antiderivada |
|---|---|---|
| 1 | $\int dx$ | $x + C$ |
| 2 | $\int x^n dx, si\ n \in \mathbb{R} - \{-1\}$ | $\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ |
| 3 | $\int \frac{dx}{x}$ | $\ln\ \lvert x \rvert + C$ |
| 4 | $\int e^x dx$ | $e^x + C$ |
| 5 | $\int a^x dx$ | $\frac{a^x}{\ln a} + C$ |
| 6 | $\int sen\ x\ dx$ | $-\cos x + C$ |
| 7 | $\int \cos x\ dx$ | $sen\ x + C$ |

**Analicemos los siguientes ejemplos:**

**1.** $\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx =$

Aplicando la regla n°2 pero previamente convirtiendo la expresión en una potencia de exponente racional negativo:

$$\int x^{\frac{-1}{3}} dx = \frac{x^{\frac{-1}{3}+1}}{\frac{-1}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2 + C}$$

Que es la familia de primitivas buscada, pues se cumple que: $\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}} + C\right) = x^{\frac{-1}{3}}$

**2.** $\int (2x + sen\ x) dx =$

Por propiedad 4, donde a la primera le aplicaremos sucesivamente la propiedad 3 y la regla n°2, y a la segunda la regla n°6:

$$= \int (2x + sen\ x) dx = \int 2x\ dx + \int sen\ x\ dx$$

$$= 2\int x\ dx + \int sen\ x\ dx = \frac{2\,x^2}{2} + (-\cos x) + C =$$

$$= x^2 - \cos x + C$$

Que es la solución, por cuando $\frac{d}{dx}(x^2 - \cos x + C) = 2x + sen\ x$

**INTEGRALES INDEFINIDAS** **Parte Práctica Explicativa**

**¡¡Analicemos los siguientes ejercicios!!**

1) $\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 + c$

Propiedad aplicada (Igualdad) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$

2) $\int \frac{1}{x^2}\, dx = \int x^{-2}\, dx = x^{-1} + c = -\frac{1}{x} + c$

3) $\int 2x^{2/3}dx = 2\int x^{2/3}\, dx = 2\frac{x^{5/3}}{5/3} = \frac{6}{5}x^{5/3} + c$ 2/3+1=5/3 2:5/3=6/5

4) $\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{1/3}\, dx = \frac{x^{\ 4/3}}{4/3} + c = \frac{3}{4}x^{4/3} + c$ 1/3+1=4/3 1:4/3=3/4

3) $\int(6x^2 + 3x + 5x^{-1} + 3)\, dx = 6\int x^2 dx + 3\int x\, dx + 5\int x^{-1}\, dx + \int 3dx$

Integral $\frac{1}{x} = \ln x$

Simplificamos $= 6\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} + 5\ln x + x + c$

$= 2x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 5\ln x + x + c$

## Aplicando las reglas de integración, resolver las siguientes integrales indefinidas e inmediatas

1) $\int(3x^3 - 5x^2 + 3x + 4)dx$
2) $\int(senx + 7cox - 1\,)dx$
3) $\int tg^2x\ dx$
4) $\int(\sqrt{x} - 2)dx$
5) $\int \frac{2}{\sqrt{x}}dx$
6) $\int \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x}dx$ (Para integrar 1° Simplificar, distribuyendo denominador)
7) $\int(4x + 3)^2 dx$ (Para integrar 1° aplicar cuadrado de un binomio)
8) $\int \frac{(2x-1)^2}{2x}dx$ (Aplicar cuadrado de un binomio en numerador, luego simplificar el integrar por último)
9) $\int(2\sqrt{x} - \sqrt[3]{x} - x^4)dx$
10) $\int\left(\frac{3}{x} - \frac{x}{3}\right)dx$
11) $\int \frac{2e^x + e^{2x}}{e^x}dx$ (Distribuir denominador, simplificar y luego integrar)
12) $\int(4x + 2)(x - 1)dx$ (Aplicar distributiva, luego integrar)
13) $\int 5^x dx$
14) $\int e^{2x+1}dx$

Presentar trabajo en forma prolija. Con todos los datos correspondientes. Fecha de presentación: 26-04-21

Dudas o consultas al profesor Esteban Saravia ► Lunes a Viernes (13:00hs a 19:00hs) Cel. 03482-692952